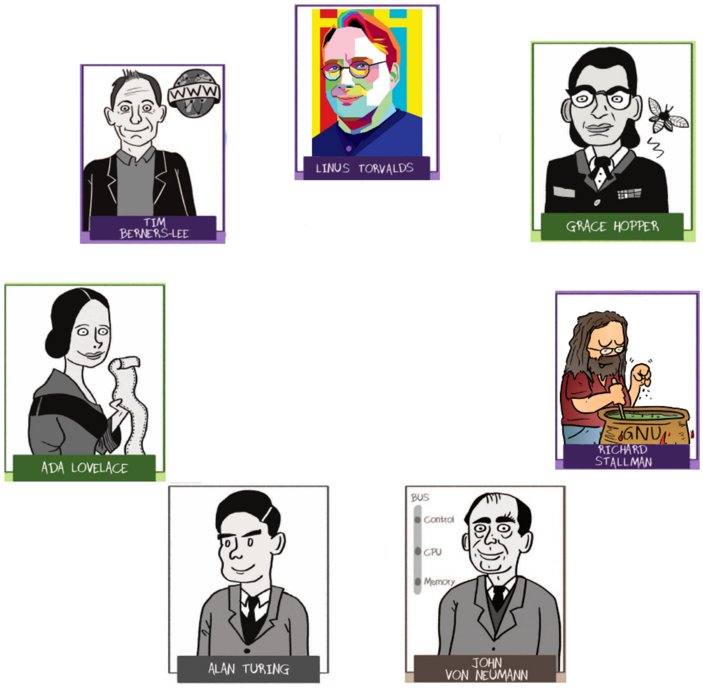
0.1 Activité:Graphes

Linus, Grace, Richard, John, Alan, Ada et Tim sont inscrits sur un réseau social.

- Linus est ami avec Grace, Alan et Ada.
- Grace est ami avec Linus, John et Ada.
- Richard est ami avec Alan et Tim.
- John est ami avec Grace, Alan et Tim.



Questions

1. Reproduire et compléter le schéma précédent, en traçant des segments représentant la relation d'amitié qui lie deux personnes. Un tel schéma s'appelle un graphe. Les personnes sont représentées par les **sommets** et les relations d'amitié sont matérialisées par les **arêtes**.
2. Les arêtes peuvent-elles être parcourues dans les deux sens ? Si oui, ce graphe est dit **non orienté**, il est **orienté** dans le cas contraire.
3. L'**ordre d'un graphe** est le nombre de ses sommets. Quel est l'ordre du graphe représenté ?
4. (a) Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par une arête. Citer deux sommets qui sont adjacents et deux sommets qui ne le sont pas.
   (b) Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont adjacents. Est-ce le cas ici ?
5. Une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets. Par exemple, la chaîne Tim - Richard - Alan est une chaîne de longueur 2. Déterminer deux chaînes reliant Linus à Tim et préciser leur longueur.
6. Un graphe est **connexe** lorsque, pour tout couple de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant. Est-ce le cas ici ?
7. Dans le contexte de l'énoncé, comment interpréter le fait que le graphe soit complet ? Soit connexe ?

En bref De multiples situations peuvent être représentées par un graphe: réseau informatique, social, routier etc.

Après la série d'exercices qui suit, vous aurait manipulé des graphes et vous maitriserez le vocabulaire.

Notre objectif sera alors de représenter les graphes par une *structure de donnée* adaptée, puis d'étudier leur différents types de parcours. Ces algorithmes de parcours seront implémentés.

Sur la théorie des graphes La naissance officielle de la théorie des graphes remonte à 1741 lorsque Euler s'est promené dans la ville de Königsberg, maintenant Kaliningrad, où deux branches du cours d'eau Pregel se rencontrent pour rejoindre la mer Baltique. Les différentes parties de la ville sont reliées par sept ponts, comme indiqué sur la figure suivante.

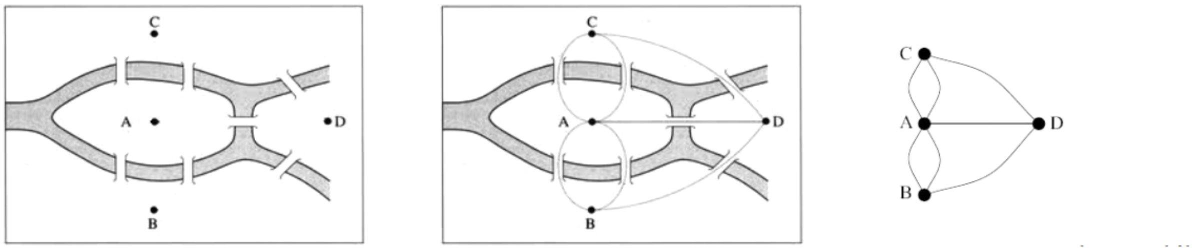


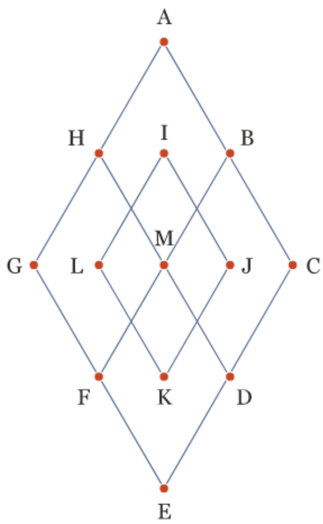
Figure 1: Ponts de Königsberg

Le problème résolu par *Euler* consiste à trouver une promenade partant d'un point, passant exactement une et une seule fois par chaque pont et revenant à ce point de départ. On laissa le nom cycle eulérien pour ce type de **chemin dans un graphe**: on part d'un sommet en ne passant qu'une et une seule fois par chaque **arête** en revenant au même endroit. Le théorème suivant nous permet d'affirmer que le problème n'a pas de solution:

Théorème (Hors programme NSI) Un graphe **connexe** admet **un cycle** passant une et une seule fois par chaque arête si, et seulement si, tous les sommets du graphe ont un degré pair.

0.1.1 Exercices

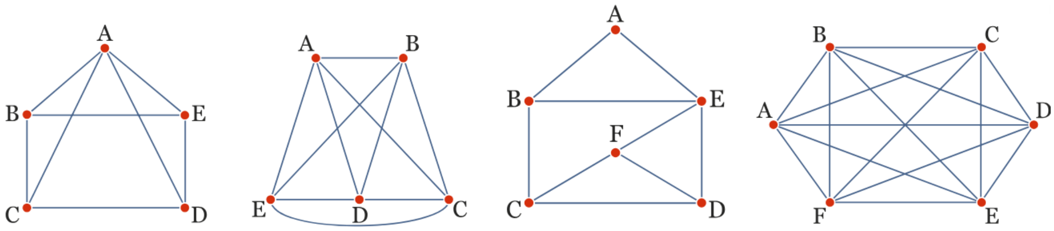
Exercice



Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. G et F sont adjacents.
2. G et A sont adjacents.
3. Ce graphe est complet.
4. Ce graphe est connexe.

Exercice



1. Pour chaque graphe, donner son ordre et le degré de chaque sommet.
2. Justifier que les graphes sont connexes.
3. Reproduire et modifier le graphe a. pour qu'il ne soit plus connexe.
4. Reproduire et modifier le graphe c. pour qu'il soit complet.
5. Dans le graphe d, quelle est la longueur de la chaîne CEBAFAC ?
6. Déterminer dans ce graphe deux chaînes de longueur 3 et une chaîne de longueur 7.
7. Déterminer dans ce graphe une chaîne de longueur 4 reliant B à A.

Exercice: Le loup, la chèvre, et le chou Sur la rive d'un fleuve se trouve un loup (L), une chèvre (C), un chou (S) et un passeur (P). L'objectif est de tous les faire passer d'une rive à l'autre en respectant les contraintes suivantes:

- Le loup et la chèvre ne peuvent pas être seuls sur la même rive.
- De même pour la chèvre et le chou.
- Le passeur ne peut prendre qu'un seul "passager".

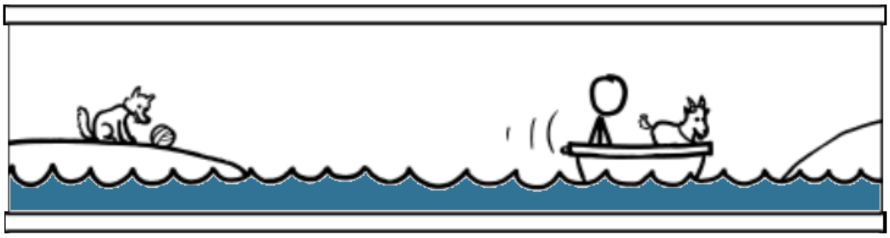


Figure 2: Le loup peut rester seul avec le chou-`https://xkcd.com/`

.

Réaliser un graphe avec les états possibles: berge de départ et d'arrivée. Le sommet de départ est **(PLCS, -)** et nous n'écrirons pas les états qui aboutissent à un impasse. Une arête met en relation deux états qui se suivent.

1. Donner un sommet qui aboutit à une impasse. Ecrire le sommet solution.
2. Expliquer pourquoi ce problème a une solution si ce graphe (ou une de ses composantes) est connexe.

Exercice On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... On peut remplir ou vider les seaux autant de fois que l'on veut. Comment doit-on faire ? On peut représenter un graphe d'états avec les couples possibles en les reliant par une arête si on peut passer de l'un à l'autre.

Exemple: On peut passer du couple de récipient (5;3) au couple (5;0) en vidant le seau de 3 litres.

1. Quel est le couple solution ?

2. Représenter le graphe ou une partie du graphe pour déterminer une solution.

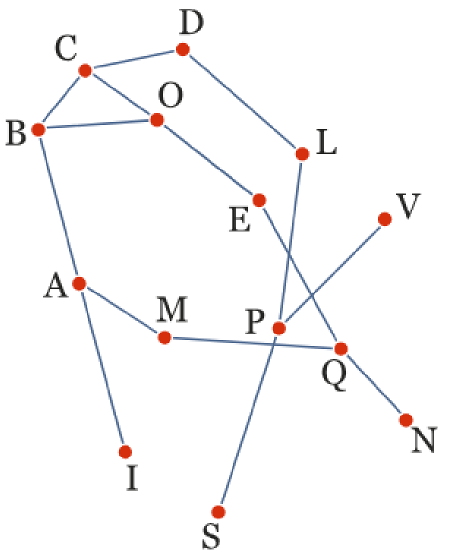
Exercice À la fin de la seconde, un élève orienté en première générale a le choix de suivre ou non l'enseignement de spécialité mathématiques.

Un élève n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité en première peut suivre l'enseignement facultatif mathématiques complémentaires en terminale.

Un élève ayant suivi l'enseignement de spécialité en première peut l'abandonner et ne plus faire de mathématiques, l'abandonner et suivre l'enseignement facultatif mathématiques complémentaires ou le poursuivre en terminale.

S'il poursuit l'enseignement de spécialité en terminale, il peut choisir de suivre l'enseignement facultatif mathématiques expertes. Représenter les différents parcours en mathématiques possibles d'un lycéen par un graphe, dont les sommets seront les différents enseignements possibles.

Exercice Le graphe ci-contre représente les autoroutes entre les principales villes de la région Hauts-de-France : Abbeville (A), Boulogne-sur-Mer (B), Calais (C), Dunkerque (D), Lens (E), Beauvais (I), Lille (L), Amiens (M), Laon (N), Saint-Omer (O), Péronne (P), Saint-Quentin (Q), Senlis (S) et Valenciennes (V).



1. Quel est l'ordre de ce graphe ?

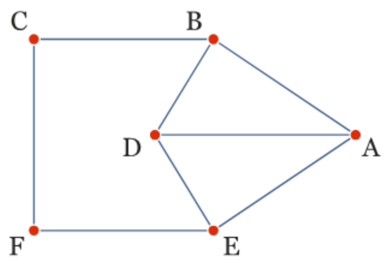
2. (a) Quels sont les sommets de plus haut degré ?

   (b) Quels sont les sommets de plus petit degré ?

3. Les sommets L et E sont-ils adjacents ?

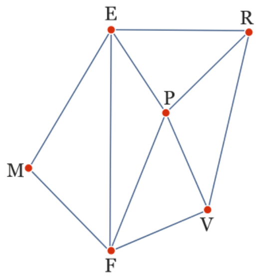
4. Ce graphe est-il complet ? Justifier.

Exercice On considère le graphe ci-dessous. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 4 reliant A à D.

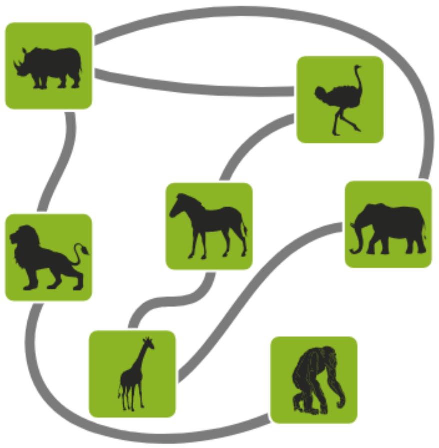


Exercice Un restaurateur se fournit auprès de cinq producteurs locaux. Le graphe ci-dessous représente la situation géographique du restaurateur et de ses fournisseurs, les arêtes correspondant au réseau routier et les sommets aux producteurs : éleveur (E), fromager (F), maraîcher (M), pisciculteur (P), restaurateur (R) et vigneron (V).

1. Quel est l'ordre de ce graphe ?
2. (a) Quel est le degré du sommet P ?
   (b) Citer un sommet de degré inférieur ou égal à 3.
   (c) Citer deux sommets de degré impair.
3. Citer deux sommets adjacents et deux sommets qui ne sont pas adjacents.
4. Ce graphe est-il complet ? Justifier.



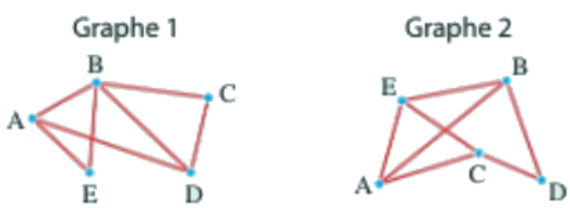
Exercice Le plan d'un parc zoologique est donné ci-dessous.



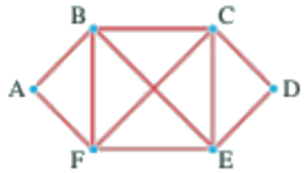
1. Modéliser le plan du parc zoologique par un graphe.
2. Quel est l'ordre de ce graphe ?
3. Quels est le sommet de plus petit degré ?
4. Ce graphe est-il complet ? Justifier.
5. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

Exercice: Théorème d'Euler Dans le cas d'un graphe non orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulemtn si le nombre de sommets ayant un degré impair est 0 ou 2. Par conséquent, un graphe connexe admet un cyclé eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair (vu en introduction).

1. Peut-on dessiner les figure 1 et 2 sans lever le crayon et en ne passant qu'une et une seule fois sur chaque arête. Justifier.



2. Le graphe suivant représente la disposition de 7 batiments d'une entreprise, tous reliés par une passerelle.. L'agent de sécurité part du batiment A pour effectuer sa ronde. Peut-il parcourir tous les batiments en passant une et une seule fois par chaque passerelle ?



Exercice Etudiez la classe Graphe ci-dessous puis utilisez-la pour modifier l'algorithme du parcours en profondeur.

Exercice Huit poissons, désignés dans la suite par A, B, C, D, E, F, G et H doivent être répartis dans un nombre minimum d'aquariums mais certains ne peuvent cohabiter.

Le tableau suivant répertorie ces incompatibilités, une croix entre deux poissons signifiant qu'ils ne peuvent pas cohabiter : La question est donc de déterminer le nombre minimum d'aquariums nécessaire pour loger tous ces poissons.

On commencera par associer à ce problème un graphe résumant les incompatibilités : un sommet par poisson, et une arête entre deux sommets indique que les poissons correspondants ne peuvent pas cohabiter.

Exercice: Colorier un graphe

Partie A : Étude du problème Colorier un graphe, c'est affecter une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Le nombre chromatique, noté γ , est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier un graphe. Considérons un graphe G. Un sous-graphe de G est un graphe G' composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes reliant ces sommets. Notons m l'ordre du plus grand des sous-graphes complets de G et Δ le plus grand degré des sommets de G. Alors $m \leqslant \gamma \leqslant \Delta + 1$. Prouver cette inégalité.

Partie B : Algorithme de Welsh-Powell Pour colorier un graphe, on utilise l'algorithme suivant.

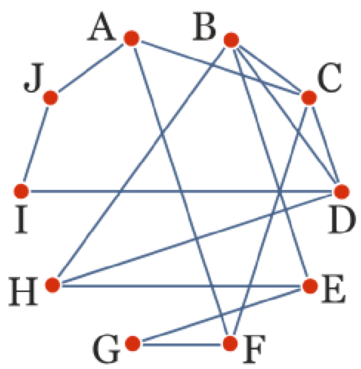
Étape 1 : Lister les sommets par ordre de degré décroissant.

Étape 2 : Attribuer une couleur C1 au premier sommet de la liste.

Étape 3 : Attribuer cette même couleur à tous les sommets qui ne sont pas adjacents avec le premier sommet de la liste et qui ne sont pas adjacents entre eux.

Étape 4 : Répéter les étapes 2 et 3 tant que tous les sommets ne sont pas coloriés.

Colorier le graphe ci-dessous à l'aide de cet algorithme.



Partie C : Application Richard est éducateur de chiens : il donne des leçons de dressage le samedi après-midi.

Neuf chiots sont présents : Aéro, Banjo, Carrousel, Dirka, Erald, Farore, Gipsy, Hyacinthe et Igor. Richard souhaite réaliser des exercices d'apprentissage par petits groupes de deux ou trois chiens. Farore ne pense qu'à jouer si elle est trop proche de Banjo, Carousel ou Erald. De même, Dirka est très distraite si Banjo ou Farore sont à proximité ! Igor ne supporte pas le caractère trop fougueux de Gipsy. Enfin, le turbulent Aéro ne supporte la présence d'aucun autre chiot, sauf Erald et Hyacinthe.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un graphe G, dont les sommets sont les noms des chiots et relier entre eux les chiots que l'on ne peut pas mettre ensemble pour ce travail de groupe.
2. Le graphe G est-il connexe ? Justifier.
3. (a) Déterminer un sous-graphe complet d'ordre maximal du graphe G.
   (b) Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique du graphe G ?
4. Donner la valeur du nombre chromatique du graphe G.
5. Peut-on proposer une répartition des chiots en groupes de deux à trois chiots pouvant travailler ensemble ?