Chapter 1

Translation et vecteurs

Dans ce chapitre, on parle de transformation et de balai volant.

Transformations Vous avez déjà vu plusieurs transformations au collège : la symétie axiale, centrale, la rotation et la translation.

Vous avez tracé des *images* de point par pliage, par demi-tour et par rotation d'angle quelconque. Ces transformations conservent toutes les longueurs : un segment a pour image un segment de même longueur. Ce sont des isométries.

Glisser Nous revenons sur la translation, transformation qui est associée à un glissement.

Illustration : David Revoy CC-BY 4.0

1.1 Translation et notion de vecteur

Définition : Soient K et J deux points distincts du plan, la translation qui transforme K en J est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{KJ}$. J est le translaté de K par cette translation.

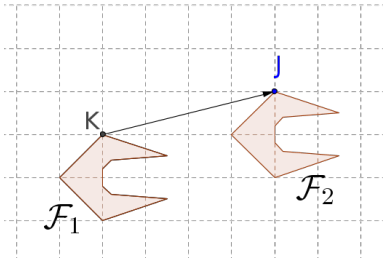
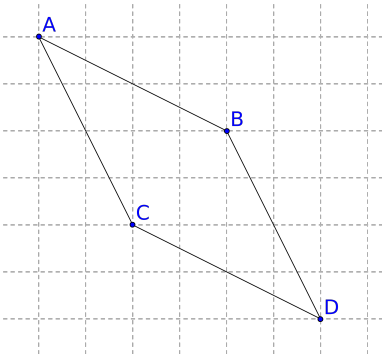


Figure 1.1: $\mathcal{F}_2$ est la translatée de $\mathcal{F}_1$

Le vecteur $\overrightarrow{KJ}$ a comme direction celle de la droite (KJ), comme sens celui de K vers J et comme norme la longueur du segment $[KJ]$, notée $\|\overrightarrow{KJ}\|$.

Image d'un point par une translation et parallélogramme Soient A et B deux points du plan. La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan l'unique point D tel que ABDC soit un parallélogramme. On dit que D est l'image de C par cette translation.



1.2 Égalité de vecteur

Définition Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Propriété ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati, `si et seulement si` $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

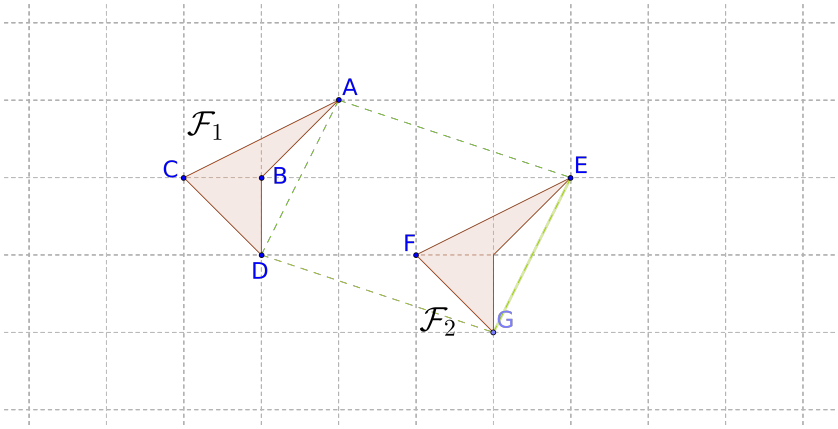
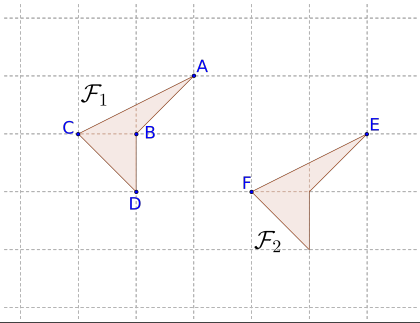


Figure 1.2: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG}$, donc AEGD est un parallélogramme

Représentant d'un vecteur On peut associer toute translation à un seul vecteur, ne dépendant d'aucun point que l'on peut noter $\overrightarrow{u}$. Dans ce cas, quel que soit M, si M a pour image M', on a $MM' = \overrightarrow{u}$. MM' est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Exemple : Soit $\mathcal{T}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ qui transforme A en E. $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DM}$ sont des représentants du vecteur $\overrightarrow{u}$.



CC-BY 4.0

Vecteur nul Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé vecteur nul, on le note $\overrightarrow{0}$. Une translation de vecteur $\overrightarrow{0}$ transforme M en lui-même.

À faire : Exercice 15 à 17 page 124.

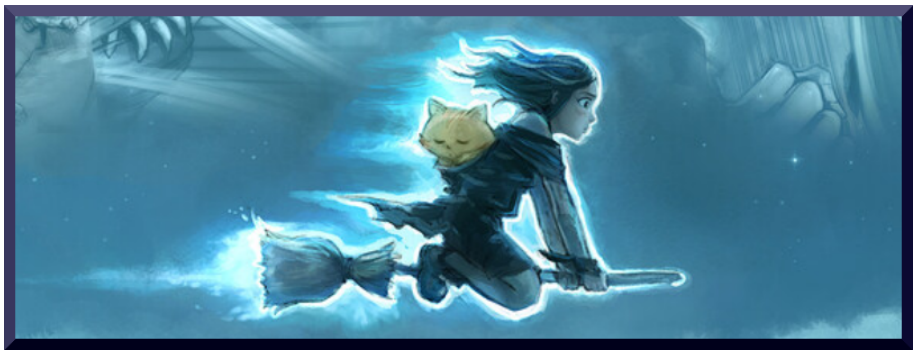


Figure 1.3: Translation

1.3 Coordonnées de vecteur

Soit (O;I,J) un repère tel que :

- OI=OJ=1 unité de longueur,
- $(OI) \perp (OJ)$,

Un tel repère est dit orthonormé. On note $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ et on appelle base orthonormée le couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1.3.1 Coordonnées de vecteurs dans une base orthonormée.

Soient x, y, x', y', k des réels, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points du plan. On notera également

Propriétés

1. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan s'écrit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, x et y sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ notées $\overrightarrow{u}(x, y)$. On pourra aussi écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ ou $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple Soient A$(1; -1)$ et B$(-2; 3)$ deux points du plan. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

CC-BY 4.0

1.3.2 Somme de vecteurs

Dans ce paragraphe, on considère les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$. k est un réel.

Définition: Lorsqu'on applique successivement la translation de vecteur $\vec{u}$ puis celle de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation dont le vecteur $\vec{w}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ notée $\overrightarrow{u+v}$.

On en déduit que $\overrightarrow{u+v} = \overrightarrow{v+u}$.

Construction du vecteur somme Pour construire la somme $\overrightarrow{u+v}$, on peut utiliser la relation de Chasles :

Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

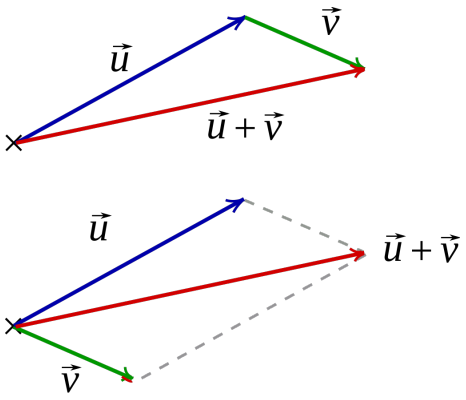


Figure 1.4: source : *Wikipedia*

Avec des coordonnées Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Autrement dit, pour additionner des vecteurs, on additionne leurs coordonnées composante par composante.

Remarque : Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Vecteur opposé On appelle opposé d'un vecteur $\vec{u}$ le vecteur de même direction, de même norme et de sens contraire que $\vec{u}$. On le note $-\vec{u}$.

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Note : $\vec{u} + (-\vec{v})$ peut s'écrire $\vec{u} - \vec{v}$.

Exemple Montrer que pour tout points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 40, 41, 44 page 126

CC-BY 4.0

1.4 Calculer avec les coordonnées.

1.4.1 Milieu d'un segment

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère quelconque : Le mileu I de [AB] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

1.4.2 Distance entre deux points en repère orthonormé

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'un repère orthonormé :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Exemple Soient $(O, \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé et $A(1; -1)$, $B(-2; 3)$ deux points.

1. Calculer AB.
2. Calculer les coordonénes du milieu de [AB].

1.5 Un algorithme : coordonnées d'un vecteur

Le programme Python suivant prend en paramètre les variables x_A, y_A, x_B, y_B et renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

```
1 def distance(x_A, y_A, x_B, y_A):
2     x = x_B - x_A
3     y = y_B - y_A
4     return x, y
```

Appel de la fonction `distance` avec $A(1; -1)$ et $B(-2; 3)$:

```
>>> distance(1, -1, -2, 3)
(-3, 4)
```

Exercice : Écrire en *Python* une fonction `milieu` prenant en paramètre les variables `x_A, y_A, x_B, y_B` et renvoyant les coordonnées du milieu de $[AB]$.

CC-BY 4.0