

0.1 Modèle linéaire

rang n	Année	Population au 1 ^{er} janvier	Variation absolue
0	1980	53,9	
1	1985	55,3	
2	1990	56,7	
3	1995	57,8	
4	2000	59	
5	2005	61,2	
6	2010	62,8	
7	2015	64,4	

Figure 1: Évolution de la population française

Objectif Le but de cette activité est de comprendre comment créer un modèle mathématique pouvant représenter l'évolution démographique de la population française.

Partie A : avec une fonction

1. Remplir la colonne *variation absolue* du tableau.
2. Placer les points (rang;population) dans un repère : ils forment un **nuage de points**. Comment semblent placés les points du nuage ?
3. Avec une règle, tracer cette courbe au plus près du nuage de point.
4. Un tableur ou votre calculatrice peuvent trouver la droite passant au plus près des points de ce nuage. En arrondissant les valeurs obtenue sur la capture d'écran au dixième, tracez cette droite sur votre graphique.



5. À combien peut-on estimer la population française en 2030 en suivant ce modèle ?

Partie B : avec une suite numérique On souhaite créer un modèle linéaire en considérant le premier et le dernier point du nuage comme les termes d'une suite arithmétique. Ainsi, p_0 représente l'effectif de la population française en 1980.

1. Déterminer la raison de cette suite notée (P_n) .
2. Calculer p_1 et p_2 . À quoi correspondent ces termes pour la population française ?
3. À combien peut-on estimer la population française en 2030 en suivant ce modèle ?

0.2 Cours

La mesure de l'effectif d'une population donne un nombre fini de valeurs : la population est une grandeur discrète. On utilise un entier, souvent n , pour désigner le rang où les mesures ont été prises.

Exemple p_n peut désigner la population à l'année n après la première mesure. Dans l'activité, p_2 désigne la population 2 ans après la première mesure en 1980. L'évolution d'une population peut-être mesurée modélisée de différentes façons.

Le modèle linéaire On utilise une suite arithmétique pour modéliser l'évolution de la population lorsque la variation absolue $v_A - v_D$ est constante.

Définition Une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un nombre, toujours le même, appelé raison de la suite.

Autrement dit, la variation absolue $u_{n+1} - u_n$ est constante et pour tout entier naturel n :

- $u_{n+1} = u_n + r$
- $u_n = u_0 + n \times r$

Cela fait penser à une fonction affine mais ce n'en est pas une puisqu'il y a un nombre fini de valeurs.

Représentation graphique On peut représenter une suite par un nuage de points de coordonnées (n, u_n) . La représentation d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés sur une droite. Bien sûr, dans la réalité, les points sont rarement parfaitement alignés et il faudra approcher *au mieux* par une droite ce nuage :

- En traçant une droite au jugé et en déterminant son équation $y = m \times x + p$ à partir de deux de ses points.
- En demandant à la calculatrice de fournir une équation de la droite par régression linéaire.

0.3 Exercices

Exercice 1 Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population du Mexique, en millions d'habitants.

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Effectif	115.7	117.3	118.8	120.4	121.9	123.3	124.8	126.2

1. Représenter par un nuage de points cette série de données.
2. Par quel modèle approcher cette série ? Justifier votre réponse.
3. Donner l'équation de la courbe approchant cette série.
4. Estimer la population du Mexique en 2025.

Exercice 2 Le nombre d'habitants de la population des Hauts-de-France a augmenté d'environ 9420 par an entre 1990 et 1999. En 1990, il y avait 5 770 671 habitants.

1. Écrire le terme général de la suite arithmétique décrivant la population des Hauts-de-France, en précisant son premier terme et sa raison.
2. Calculer la population en 1999 en suivant ce modèle.
3. En 2008, la population réelle était de 5 931 091. Comparer l'estimation du modèle à cette estimation.

Exercice extrait du Livre scolaire, Enseignement scientifique.

Exercice 3 : algorithme Voici deux cas où on peut utiliser un algorithme pour étudier une suite numérique. Le caractère répétitif du calcul des termes est associé à une boucle.

Définition En informatique, une boucle est une structure de contrôle destinée à exécuter une portion de code plusieurs fois de suite. On utilisera deux types de boucles :

- La boucle **Tant que** exécute un bloc d'instructions tant qu'une condition est réalisée.
- La boucle **Pour** exécute un bloc d'instructions un nombre de fois donné.

Algorithme 1 : Boucle Tant que	Algorithme 2 : Boucle Pour
<pre> 1 tant que condition est vérifiée faire 2 Bloc d'instructions 3 fin </pre>	<pre> 1 pour i allant de 1 à n faire 2 Bloc d'instructions 3 fin </pre>

Le langage Python sera utilisé, en voici la syntaxe sur un exemple avec une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme 5 :

```

u = 5
while u <= 350:
    u = u + 100
    print(u)

```

```

u = 5
for i in range(10):
    u = u + 100
    print(u)

```

Applications

1. **Calcul des valeurs** Lorsqu'on veut calculer tous les termes d'une suite, on utilise une boucle **for**. Complétez le *programme 1* afin de calculer les 20 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 25 et de raison 10.
2. **Calcul de valeur seuil** Lorsqu'on veut déterminer le rang où les valeurs de la suite auront dépassé une valeur seuil, on utilise une boucle **while**. Complétez le programme 2 afin de déterminer le rang pour une valeur seuil de 1000.

Programme 1

```
u = 5
.....
for i in range():
    u = u + .....
    .....
.....
```

Programme 2

```
u = 25
n = 0
while u <= .....:
    u = u + .....
    n = .....
print(n)
```



Figure 2: Illustration David Revoy CC-BY

0.4 Modèle exponentiel

Pourcentages Calculer :

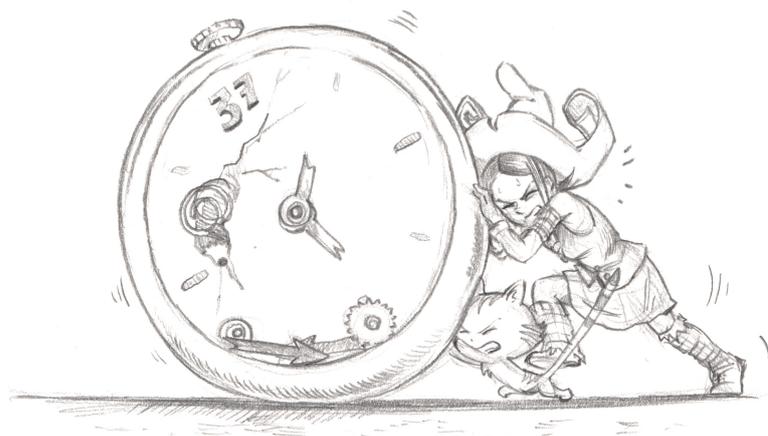
1. 20 % de 80.
2. Le taux d'évolution entre $y_1 = 150$ et $y_2 = 180$. Entre $y_1 = 25$ et $y_2 = 15$.
3. La proportion de filles dans une classe où il y a 21 filles et 32 élèves.

Variation relative Le tableau suivant donne l'évolution de la population d'une ville de 2010 à 2019.

1. Compléter les colonnes variation **absolue** et variation **relative**.
2. Tracer le nuage de points correspondant.
3. Justifier le modèle pouvant être utilisé pour approcher cette situation. En déduire une estimation de cette population en 2030.
4. Écrire un algorithme permettant de répondre à cette question.

Le modèle exponentiel Lorsque la variation n'est pas constante, on peut calculer le taux de variation. S'il est constant, on adoptera le modèle exponentiel.

Année	Population	Variation	
		absolue	relative
0	31,3		
1	31,7		
2	32		
3	32,5		
4	32,9		
5	33,3		
6	36,3		
7	39,5		
8	43,2		
9	47,1		



Le modèle linéaire On utilise une suite arithmétique pour modéliser l'évolution de la population lorsque la variation absolue $V_A - V_D$ est constante.

Définition Une suite $(V_n)_n$ est géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un nombre, toujours le même, appelé raison de la suite.

Autrement dit, la variation relative $t = \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n}$ est constante et pour tout entier naturel n :

- $v_{n+1} = v_n \times q$
- $v_n = v_0 \times q^n$ où $q = 1 + t$.

Attention : le taux de variation est rarement constant. Pour n évolutions, on peut approcher le taux t par un taux moyen basé sur le taux global T . On a :

$$(1 + t)^n = 1 + T$$

D'où :

$$(1 + t) = (1 + T)^{1/n}$$

Exemple : appliquer cette formule aux valeurs du tableau précédent.

Exercices

Exercice 1 Quelle est le modèle pouvant approcher l'évolution de la population décrite dans ce tableau ?

Année	Population
1975	3 153 253
1976	3 251 145
1977	3 352 825
1978	3 458 095
1979	3 566 665
1980	3 678 279
1981	3 792 919
1982	3 910 640
1983	4 031 325

Exercice 2 Voici l'évolution de la production de riz dans un petit pays en kilogramme. On choisit un modèle exponentiel pour modéliser l'évolution de la production.

Année	2006	2 007	2008	2 009	2010
Production	194 585	198 388	203 733	219 850	243 104

1. Calculer le taux de variation entre 2006 et 2010. En déduire le taux annuel moyen t .
2. On considère alors la suite géométrique (U_n) de raison $1+t$ et de premier terme $u_0 = 194 585$. Donner une estimation de cette production en 2018 avec ce modèle.
3. La production était de 224 211 kilogrammes en 2018. Que pensez-vous de ce modèle ?