Chapter 1

Graphes-Première partie

Programmes:

Graphes : structures relationnelles. Sommets, arcs, arêtes, graphes orientés ou non orientés.	Modéliser des situations sous forme de graphes. Écrire les implémentations correspondantes d'un graphe : matrice d'adjacence, liste de successeurs/de prédécesseurs. Passer d'une représentation à une autre.	On s'appuie sur des exemples comme le réseau routier, le réseau électrique, internet, les réseaux sociaux. Le choix de la représentation dépend du traitement qu'on veut mettre en place : on fait le lien avec la rubrique « algorithmique ».

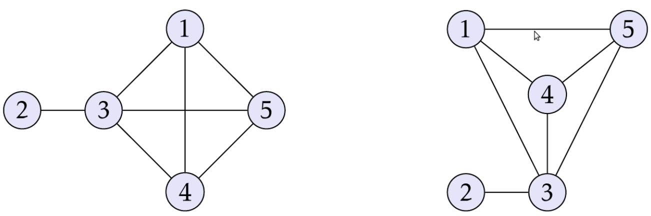
1.1 Définition et représentation

Un graphe est un ensemble d'objets : des sommets reliés par des liaisons. On notera S l'ensemble des sommets et A celui des liaisons. Les éléments de S sont en relation binaire grâce aux liaisons : ils peuvent être comparés.

1.1.1 Approche par la représentation

Les graphes tirent leur nom du fait qu'on peut les représenter graphiquement : à chaque sommet de G on fait correspondre un point du plan et on relie les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Il existe donc une infinité de représentations possibles.

Exemple 1 : graphe non orienté les deux dessins qui suivent représentent le même graphe G_1, avec S $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et A $= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$:

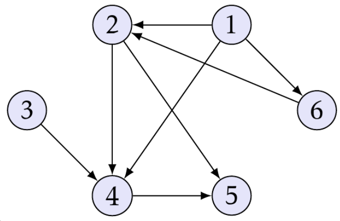


Représentation sagittale du graphe G_1

G_1 est un graphe non orienté, on peut parcourir les liens dans les deux sens. G_1 est un graphe d'ordre 4 . Il possède un sommet de degré 1 (le sommet 2), trois sommets de degré 3 (les sommets 1, 4 et 5) et un sommet de degré 4 (le sommet 3).

Exemple 2 : graphe orienté Le graphe G_2 ci-contre est défini par:

- S=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



- A=$\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (6, 2)\}$.

Le sommet 1 a un degré sortant égal à 3 et un degré entrant égal à 0, tandis que le sommet 2 a un degré entrant et un degré sortant tous deux égaux à 2

1.1.2 Définitions

Graphe non orienté Lorsque l'orientation des liaisons est inutile, on utilise un graphe non orienté. Un graphe non orienté G =(S, A) est composé d'un ensemble fini S d'éléments appelés sommets et d'une famille de paires de S dont les éléments sont appelés arêtes $\{x, y\}$.

Graphe orienté Un graphe orienté G = (S, A) est composé d'un ensemble fini S d'éléments appelés sommets et d'une partie A de $S \times S = \{s_1, s_2; s_3...., s_n\}$ dont les éléments sont des paires ordonnées appelés arcs. Un arc (x, y) représente une liaison orientée entre l'origine x et l'extrémité y. Dans ce cas:

- y est un successeur de x.
- x est un prédécesseur de y.
- si $x = y$, l'arc (x, x) est appelé boucle.

Vocabulaire Les défintions sont données pour les graphes non orientés. Si nécessaire, une remarque est ajoutée pour les graphes orientés

1. Deux sommets distincts d'un graphe G sont **adjacents** s'ils sont les extrémités d'une même liaison. Le **graphe** est **complet** lorsque tous ses sommets sont adjacents.
2. On appelle **ordre d'un graphe** le nombre de sommets n de ce graphe.
3. Le **degré** d'un **sommet** est le nombre de sommets qui lui sont adjacents, et le degré d'un graphe le degré maximum de tous ses sommets.

   Graphe orienté : On distingue le degré sortant d'un sommet s et le degré entrant d'un sommet selon que s est respectivement le sommet initial ou final de l'arc.
4. Une **chaîne** est une suite de sommets adjacents (sa longueur est le nombre d'arêtes utilisées).
   (a) Une chaîne est élémentaire si elle ne passe qu'une seule fois par un même sommet (dernier sommet exclu).
   (b) Une chaîne est simple si chaque arête n'est utilisée qu'une fois.
   (c) Une chaîne simple est dite **eulérienne** si elle contient toutes les arêtes du graphe.
   (d) Elle est dite **fermée** lorsque origine et extrémités sont confondues.

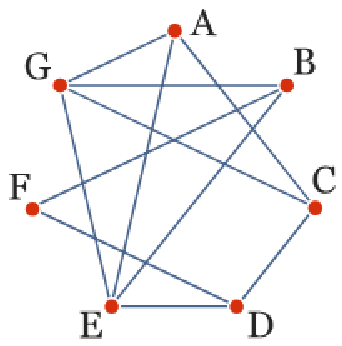
   La longueur d'une chaîne est le nombre d'arête la composant.

   Graphe orienté: On parle de chemin, les arcs ne peuvent être pris à rebours.
5. La **distance** entre deux sommets est le chemin de longueur minimale.
6. Un **cycle** est une chaîne fermée simple (donc où toutes les arêtes sont distinctes).

   Graphe orienté: On parle de circuit.

1.1.3 Exercices

Exercice 0

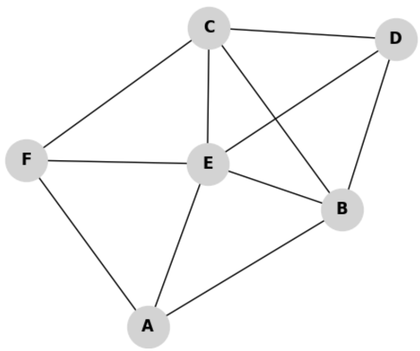


1. Quel est l'ordre de ce graphe ? Son degré ?
2. Est-il connexe ? Complet ?
3. Donner un cycle de longueur 6 passant par A.

Exercice 1

1. Donner le degré de ce graphe.
2. Citer deux chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et D du graphe G.
3. Donner la longueur de chaque chaine suivante, dire si elle est fermée et si c'est un cycle:

   AEBDCFA; AECFEA; BDCFEA



Exercice 2 6 personnes jouent un tournoi de tennis. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Quel type de graphe obtenez-vous ?
3. Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ?

   Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Exercice 3 On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres.

Comment doit-on procéder ?

Indication *On peut remplir le seau de 5L, celui de 3L et vider celui de 5L dans celui de 3L. On peut donc tracer un graphe où les sommets sont des couples donnant le contenu du récipient de 5 litres et celui du récipient de 3 litres. On place un arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration à l'autre. On cherche alors un chemin du sommet (0,0) au sommet (4,0).*

1. Donner les deux sommets adjacents au sommet (0,0).
2. Tracer un graphe avec au moins un chemin vers (4, 0).

Exercice 4 Une chèvre (C), un chou (X) et un loup (L) se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur (P) souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ? (*Académie de Bordeaux*)

Indication Cette situation peut être modélisée à l'aide d'un graphe. Les sommets du graphe sont des couples précisant qui est sur la rive initiale, qui est sur l'autre rive. Ainsi, le couple (PCX, L) signifie que le passeur est sur la rive initiale avec la chèvre et le chou (qui sont donc sous surveillance), alors que le loup est sur l'autre rive. Une arête relie deux sommets lorsqu'il est possible de passer d'une situation à l'autre. Compléter le graphe suivant *où n'ont été placés que les couples possibles* puis donner une chaine solution du problème.

$(PCXL, \star)$ (PCL, X) (PCX, L) (PXL, C) (PC, XL)

(XL, PC) (C, PXL) (L, PXC) (X, PCL) $(\star, PCXL)$

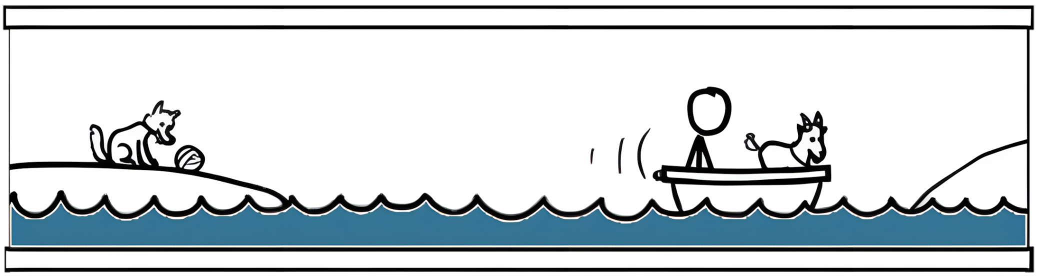


Figure 1.1: Le loup et le chou (XL) peuvent rester ensemble. (Illustration xkcd.com CC-BY-NC)

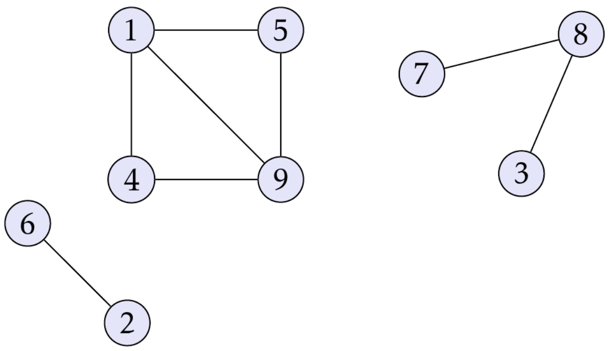
1.1.4 Connexité

Lorsqu'on passe de sommet en sommet en suivant les arêtes on construit une chaîne. Une chaîne peut passer plusieurs fois par le même sommet et/ou la même arête. La longueur de la chaîne est le nombre de sommets empruntés.

Graphe non orienté S'il existe une chaîne reliant deux sommets x et y alors on dit que x et y sont reliés par une chaîne. Cela permet de définir les composantes connexes d'un graphe qui sont les sous-graphes engendrés par les chaînes.

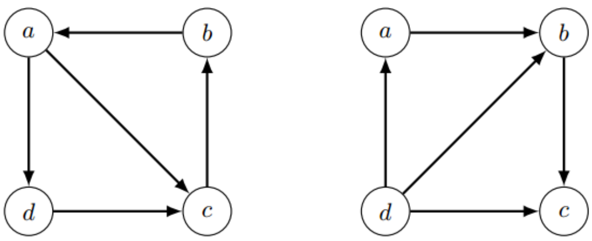
Un graphe est connexe si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets, G contient un chemin entre u et v.

Exemple: Le graphe ci-dessous a 3 composantes connexes.



Graphe orienté On retrouve les différentes notions de connexités dans les graphes orientés, en remplaçant naturellement la notion de chaîne par celle de chemin : on parle de graphe fortement connexe au lieu de connexe, de composante fortement connexe au lieu de composante connexe. On parle de composante fortement connexe pour désigner les ensembles de sommets tel que **pour tout couple de sommets il existe un chemin.**

Exemple: Le graphe de gauche est fortement connexe, tandis que celui de droite ne l'est pas.



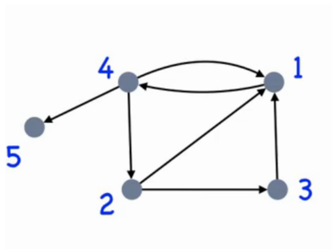
1.2 Implémentation

1.2.1 Matrice d'adjacence

On peut représenter un graphe simple par une matrice d'adjacences. Une matrice $n \times m$ est un tableau de n lignes et m colonnes. (i, j) désigne l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Dans une matrice d'adjacence, les lignes et les colonnes représentent les sommets du graphe. Pour un graphe orienté, un "1"à la position (i, j) signifie qu'un arc part de i pour rejoindre j. On peut alors voir un graphe non orienté comme un graphe orienté où les arcs sont doublés.

Exemples:

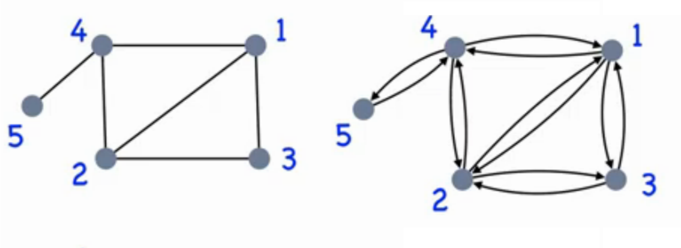
Graphe orienté On considère le graphe G_3 ci-dessous. Les "1"sont placés aux intersections entre un sommet et son successeur. Conformeméent à la définition, les sommets de départs sont placés verticalement.



	1	2	3	4	5
1	0	0	0	**1**	0
2	**1**	0	**1**	0	0
3	**1**	0	0	0	0
4	**1**	**1**	0	0	**1**
5	0	0	0	0	0

Figure 1.2: G3 : graphe orienté

Graphe non orienté Graphe G_4 non orienté. Les "1"sont placés aux intersections entre sommets voisins.



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	1	1	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1
5	0	0	0	1	0

Graphe G4 - non orienté

Cette matrice a plusieurs caractéristiques :

1. Elle est carrée : il y a autant de lignes que de colonnes.
2. Il n'y a que des zéros sur la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. Un "1"sur la diagonale indiquerait une boucle.
3. **Graphe non orienté:** elle est symétrique : $m_{ij} = m_{ji}$. On peut dire que la diagonale est un axe de symétrie.

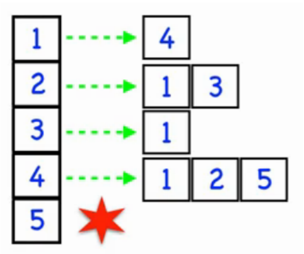
   Graphe orienté: elle n'est pas symétrique.
4. Une fois que l'on fixe l'ordre des sommets, il existe une matrice d'adjacences unique pour chaque graphe. Celle-ci n'est la matrice d'adjacences d'aucun autre graphe.

On remarquera que les valeurs des nombres peuvet être plus grandes que 1 si il y a deux arêtes qui rejoignent les mêmes sommets

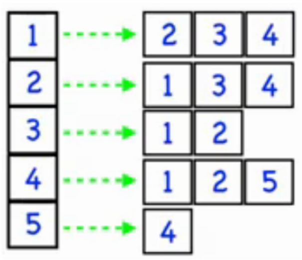
1.2.2 Liste d'adjacence

On peut aussi représenter un graphe simple en donnant pour chacun de ses sommets la liste de ses sommets adjacents (cas non orienté) ou de ses successeurs (cas orienté).

Exemples: En reprenant les graphes de l'exemple précédent:



Graphe G3 orienté



Graphe G4 non orienté

Ce type de représentation se prête bien à l'utilisation de **dictionnaires** : les clés représentent les étiquettes, les valeurs la liste des sommets adjacents.

Exemples : Écrire les dictionnaires correspondant aux graphes G3 et G4.

1.3 Opérations usuelles du type abstrait

On définit les primitives suivantes pour un graphe :

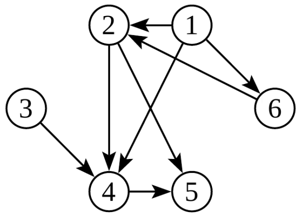
- Ajouter un sommet
- Supprimer un sommet
- Ajouter une arête
- Supprimer une arête
- Deux sommets sont-ils voisins ?
- Liste des voisins d'un sommet

L'exercice 6 propose de les implémenter avec une classe.

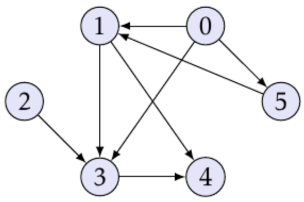
1.4 Exercices

Exercice 1 Donner les matrices et listes d'adjacence pour les graphes suivants:

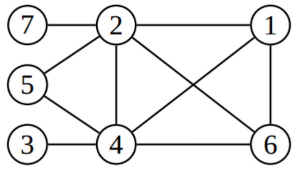
1. Graphe H_1



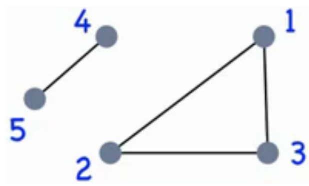
2. Graphe H_2



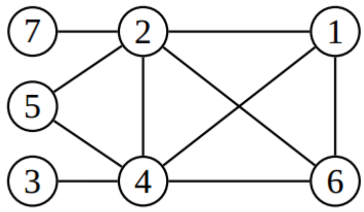
3. Graphe H_3



4. Graphe H_4



Exercice 2 Decrivez ce graphe par une matrice d'adjacence puis des listes d'adjacence.



Exercice 3 Le graphe ci-dessous représente les principaux sites touristiques de l'Islande. Le sommet B désigne *Le lagon bleu*, de même:

H : Rocher Hvitserkur

M : Lac de Myvatn

D : Chute d'eau de Dettifoss

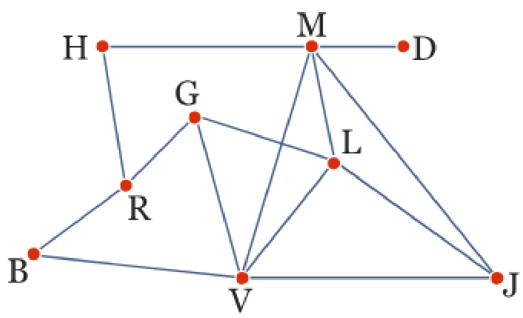
G : Geyser de Geysir

L : Massif du Landmannalaugar

R : Capitale Reykjavik

V : Ville de Vik

J : Lagune glacière de Jökulsárlón



Questions

1. Quel est l'ordre de ce graphe ? Justifier.
2. Ce graphe est-il complet ? Justifier.
3. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.
4. Déterminer la matrice d'adjacence de ce graphe (les sommets seront classés dans l'ordre alphabétique).

Exercice 4

1. Ecrire un algorithme `mat2lis(tab)` permettant de passer d'une matrice d'adjacence à une liste d'adjacence écrite sous forme de dictionnaire.
2. Ecrire un algorithme `dic2lis(tab)` permettant de passer d'une liste d'adjacence écrite sous forme de dictionnaire à une matrice d'adjacence.

Exercice 5 Huit poissons, désignés dans la suite par A, B, C, D, E, F, G et H doivent être répartis dans un nombre minimum d'aquariums mais certains ne peuvent cohabiter.

Le tableau suivant répertorie ces incompatibilités, une croix entre deux poissons signifiant qu'ils ne peuvent pas cohabiter : La question est donc de déterminer le nombre minimum d'aquariums nécessaire pour loger tous ces poissons.

On commencera par associer à ce problème un graphe résumant les incompatibilités : un sommet par poisson, et une arête entre deux sommets indique que les poissons correspondants ne peuvent pas cohabiter.

Exercice 6 Compléter la classe `Graphe` suivante:

```
class Graphe():
    """
    Le graphe est représenté par un dictionnaire d'adjacence
    """

    def __init__(self):
        self.adj = {}

    def ajouter_sommet(self, s):
        """
        L'ensemble des voisins du sommet s sont dans un 'set'
        """
        if s not in self.adj:
            self.adj[s] = set()

    def ajouter_arc(self, s1, s2):
        """
        ajoute l'arc (s1,s2)
        """
        self.ajouter_sommet(s1)
        self.ajouter_sommet(s2)
        .....................................

    def arc(self, s1, s2):
        """
        renvoie True si un arc existe entre s1 et s2
        """
        return .......................

    def sommets(self):
        return list(self.adj)

    def voisins(self, s):
        """
        renvoie la liste des voisins de s
        """
        return .......................
```

1.5 Références

- Chaîne *À la découverte des graphes* Licence Creative Commons.