0.1 Modélisation d'une expérience aléatoire

0.1.1 Définition

Définir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire d'univers Ω, c'est :

- Donner l'ensemble des issues possibles : $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$.
- À chacune de ces issues x_i, attribuer un nombre p_i de l'intervalle $[0; 1]$ tel que :

$$p_1 + p_2 + ...p_n = 1.$$

p_i est appelé probabilité de x_i, attribuer les p_i à chaque issue x_i, c'est donner la loi de probabilité associée à cette expérience.

On peut résumer ces informations dans un tableau :

Issue possible x_i	x_1	x_2	.....	x_n
Probabilité p_i	p_1	p_2	.....	x_n

0.1.2 Choix du modèle

Deux méthodes sont alors possibles pour choisir le modèle de probabilité :

1. Dans une situation d'équiprobabilité : chaque issue a autant de chance de se produire qu'une autre.

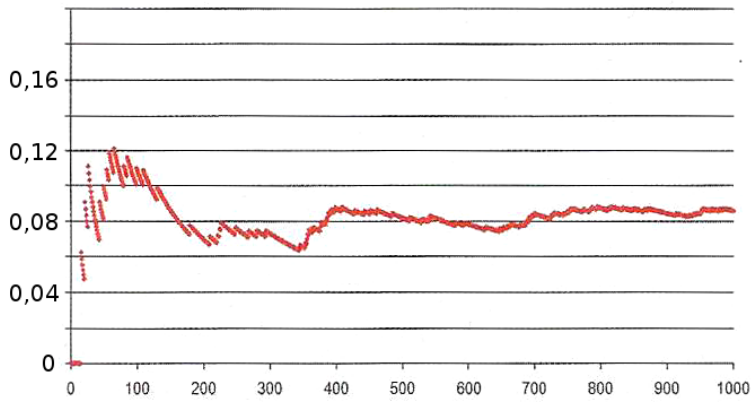
   Exemple : Lors d'un lancer de dé, on donne la *loi de probabilité* ci-contre. L'ensemble des résultats ou **issues** est :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   $$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

2. Sinon, lorsqu'on observe les fréquences pour un grand nombre de répétition, la fréquence de chaque issue se stabilise autour d'une valeur : on la choisit comme probabilité de l'issue.

   Exemple : Ci-dessous, on a relevé pour un grand nombre de lancer la fréquence d'apparition d'un 2 lors d'un lancer de dé cubique non équilibré : elle se stabilise autour de 0,08.



On a ainsi relevé les fréquences d'apparition de toutes les faces : ce n'est plus une situation d'équiprobabilité.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,20	0,08	0,10	0,22	0,16	0,24

Attention, on a toujours $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

0.2 Définitions

Un évènement est une partie de l'univers. A et B désignent deux évènements se rapportant à une expérience aléatoire d'univers Ω.

- L'événement *"A et B"* est constitué des issues réalisant à la fois l'évènement A et l'évènement B. On le note $A \cap B$ qui se prononce "A inter B"

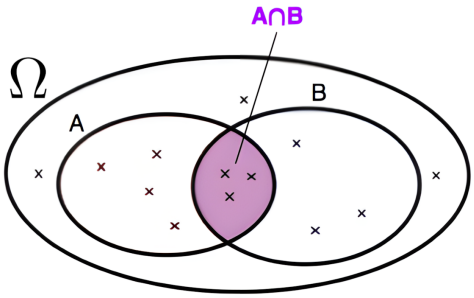


Figure 1: Intersection de A et B

.

- L'évènement *"A ou B"* est constitué des issues réalisant l'évènement A ou l'évènement B, c'est à dire au moins l'un des deux évènements. On le note $A \cup B$ qui se prononce "A union B".

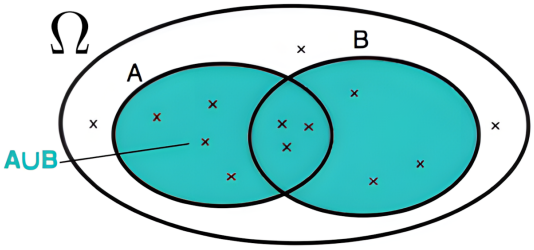
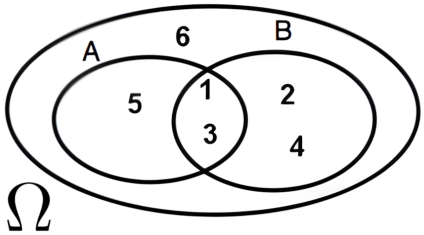


Figure 2: Union de A et B

- Un évènement élémentaire est composé d'une seule issue.
- Un évènement est impossible lorsqu'il n'est jamais réalisé. Sa probablité est 0.
- Une évènement est certain lorsqu'il est toujours réalisé. Sa probabilité est 1.
- L'évènement contraire de A est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. Il est noté $\bar{A}$.

Exemple : On lance un dé équilibré à 6 faces. On note les événements A : "le numéro obtenu est impair" et B : "le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4".

On peut tracer un diagramme de *Venn* :



Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $\bar{A}$.

0.3 Calculs des probabilités et définitions

0.3.1 Cas général

La probabilité d'un évènement est la somme des probablités des issues qui le constituent.

Exemple On considère l'expérience aléatoire 1. L'évenement A = "obtenir un nombre divisible par 3" a deux issues : $A = \{3; 6\}$, donc $P(A) = P(\text{"}obtenir\ un\ 3\text{"}) + P(\text{"}obtenir\ un\ 6\text{"}) = p_1 + p_2$.

0.3.2 Calcul en situation d'équiprobabilité

En situation d'équiprobabilité, la probabilité P(A) d'un évènement A est:

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ qui\ réalisent\ A}{Nombre\ d'issues\ possibles}$$

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On considère l'évènement

$$\text{A} = \text{"}La\ carte\ tirée\ est\ un\ roi\text{"}$$

. C'est une situation d'équiprobabilité, et 4 issues réalisent l'évènement :

$$P(A) = \frac{4}{32} = 0,25$$

0.3.3 Propriétés

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Exemple : Nous avions dans l'exemple précédent :

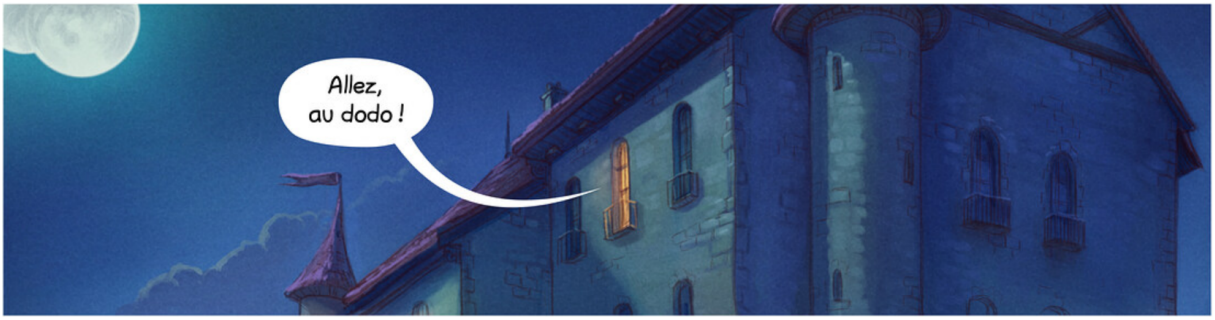
$A = \{1; 3; 5\}$ donc $P(A) = \frac{3}{6}$

$B = \{1; 2; 3; 4\}$ donc $P(B) = \frac{4}{6}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ donc $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$

$A \cap B = \{1; 3\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

On peut constater sur cet exemple que $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 76$

0.3.4 Références

Les diagramme de Venn sont issus du site d'Olivier Lecluse CC-BY-SA.